EGRI CHIZIQLAR

Umumiy tushunchalar

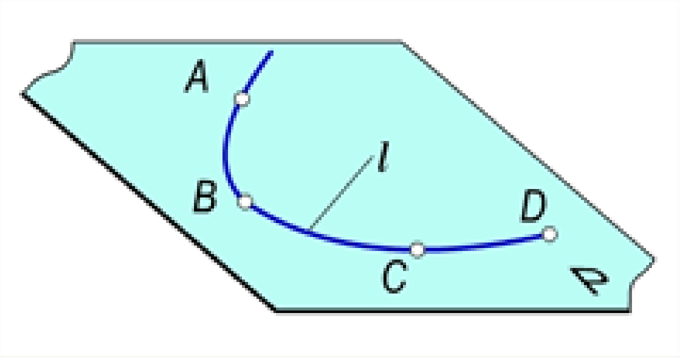
Egri chiziqlar qonuniy va qonunsiz egri chiziqlarga bo‘linadilar. Egri chiziqni tashkil kiluvchi nuqtalar to‘plami ma’lum biror qonunga buysunsa u *qonuniy*, aksincha nuqtalar to‘plami xech qanday qonunga asoslanmagan bo‘lsa, bunday egri chiziq *qonunsiz egri chiziq* deyiladi. Qonuniy egri chiziqlarning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamalariga qarab algebraik va transsendent egri chiziqlarga bo‘linadilar. Tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq *algebraik,* transsendent funksiya bilan ifodalangan egri chiziq esa *transsendent* egri chiziq deyiladi.

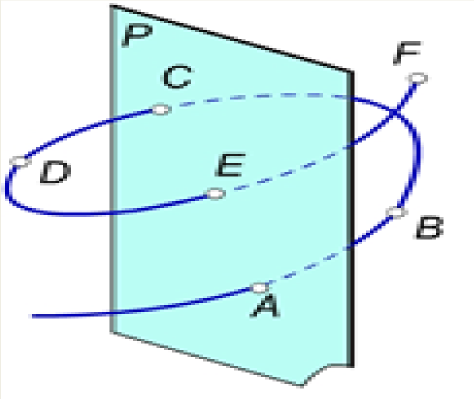
Algebrik egri chiziqlar tartib va klass tushunchalari bilan xarakterlanadi. Egri chiziqlarning tartibi uni ifodalovchi tenglamaning darajasiga teng bo‘ladi.

Grafik jihatdan tekis egri chiziqlarning tartibi uning to‘g‘ri chiziq bilan, fazoviy egri chiziqning tartibi esa uning biror tekislik bilan maksimum kesishish nuqtalar soni orqali aniqlanadi.

Tekis egri chiziqning klassi unga shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o‘tkazilgan urinmalar soni bilan, fazoviy egri chiziqning klassi unga biror to‘g‘ri chiziq orqali o‘tkazilgan urinma tekisliklar soni bilan aniqlanadi.

Egri chiziqning tartibi va klassi har xil bo‘ladi. Faqat ikkinchi tartibli egriliklarning tartibi va klassi bir xil bo‘lib, u 2 ga teng bo‘ladi.





Tekis egri chiziqlar. Ularga urinma va normal o‘tkazish

Ta’rif. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotgan egri chiziq **tekis egri chiziq** deyiladi.

Tekis egri chiziqlar analitik va grafik ko‘rinishlarda berilishi mumkin. Analitik ko‘rinishda quyidagi xollar bilan beriladi:

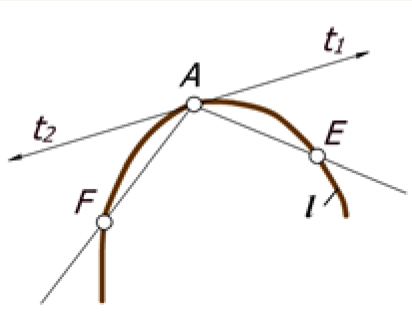
- dekart koordinatalar sistemasida f(x,u)=0 ko‘phad bilan;
- qutb koordinatalar sistemasida r=f(φ) bilan;
- parametrik ko‘rinishda x=x(t) va u=u(t) bilan.

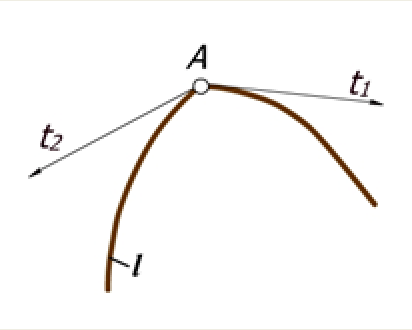
Egri chiziqlarning grafik ko‘rinishda berilishining turli xil usullari mavjud.

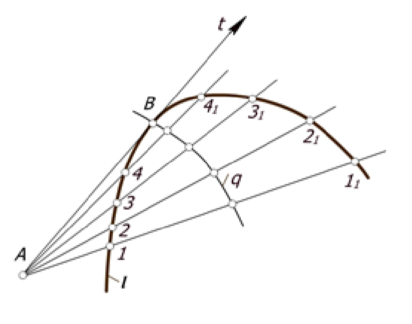
Tekislikka tegishli biror nuqtaning uzluksiz harakati natijasida tekis egri chiziq hosil bo‘ladi. Tekis egri chiziqning har bir nuqtasidan unga bitta urinma va bitta normal o‘tkazish mumkin.

7.2-rasmda berilgan ℓ tekis egri chizig‘iga uning biror A nuqtasida urinma va normal o‘tkazish ko‘rsatilgan. Buning uchun A nuqta orqali egri chiziqni kesuvchi AE va AF to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. ye nuqtani A nuqtaga egri chiziq buylab yaqinlashtira boshlaymiz. Natijada, AE kesuvchi A nuqta atrofida burila boshlaydi. ye nuqta A nuqta bilan ustma-ust tushganda AE kesuvchi t_1 urinmani xosil qiladi. Uni ℓ egri chiziqning berilgan nuqtasida o‘tkazilgan ***yarim urinma*** deyiladi. F nuqtani ham egri chiziq ustida harakatlantirib A nuqta bilan ustma-ust tushiramiz. AF kesuvchi t_2 yarim urinmani xosil qiladi. Qarama-qarshi yo‘nalgan t_1 va t_2 yarim urinmalar xosil qilgan to‘g‘ri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada o‘tkazilgan ***urinma*** deyiladi. Shunday nuqtalardan tashkil topgan egri chiziq ***ravon egri chiziq*** deyiladi.

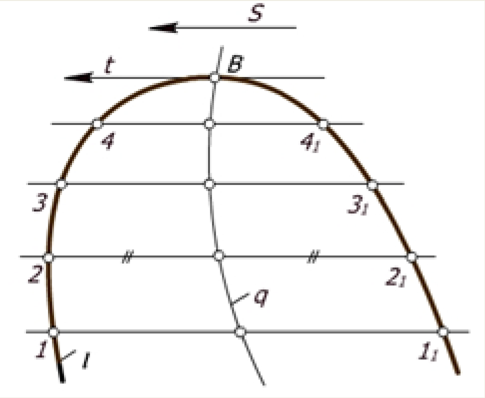
Egri chiziqning A nuqtadagi t urinmaga o‘tkazilgan perpendikulyar **n** to‘g‘ri chiziq uning normali deb ataladi. Ba’zan yarim urinmalar o‘zaro ustma-ust tushmasdan o‘zaro kesishishi mumkin. Bunday nuqtalar ***sinish nuqtasi*** deyiladi (7.3-rasm). Amaliyotda egri chiziqlarga urinma va normal o‘tkazish masalalari ko‘p uchraydi, shuning uchun urinma va normal o‘tkazishning ba’zi bir grafik usullarini kurib chikamiz.



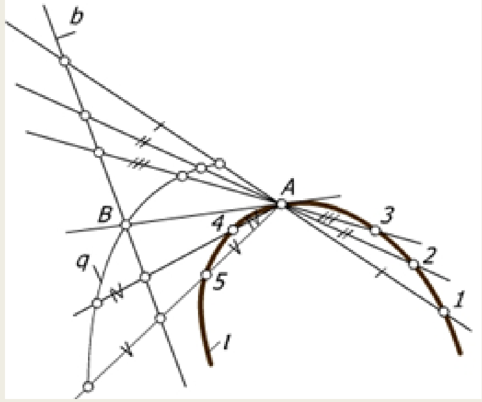




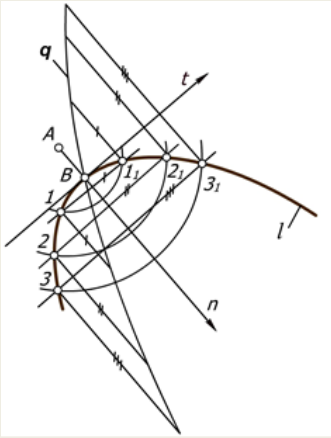
Berilgan yo‘nalishga parellel urinma o‘tkazish. Biror ℓ egri chiziqqa berilgan s yo‘nalishga parallel urinma o‘tkazish uchun ℓ egri chiziqni s yo‘nalishga parallel chiziqlar bilan kesiladi va xosil bo‘lgan ***11***$_1$, ***22***$_1$, ***33***$_1$,… vatarlarni teng ikkiga buluvchi nuqtalar orqali q xatoliklar egri chizig‘ini o‘tkaziladi q egri chiziqning ℓ bilan kesishish nuqtasi B ni topiladi. B nuqta orqali berilgan s yo‘nalishga parallel qilib t urinmani o‘tkaziladi.



Egri chiziq ustida yotgan nuqta orqali unga urinma o‘tkazish.
Berilgan ℓ egri chiziqni uning ustida yotgan A nuqtadan chikuvchi to‘g‘ri chiziqlar bilan kesiladi. A nuqtadan o‘tuvchi urinmaning taxminiy yo‘nalishiga perpendikulyar qilib b to‘g‘ri chiziqni o‘tkaziladi. kesuvchi nurlarga b to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tgan nuqtalardan boshlab usha chiziqning ℓ dagi vatar uzunligi o‘lchab quyiladi. Nuqtalar to‘plami q egri chiziqni xosil qiladi. q egri chiziqning b bilan kesishish nuqtasi B ni A nuqta bilan birlashtirganda t urinmaga xosil bo‘ladi.

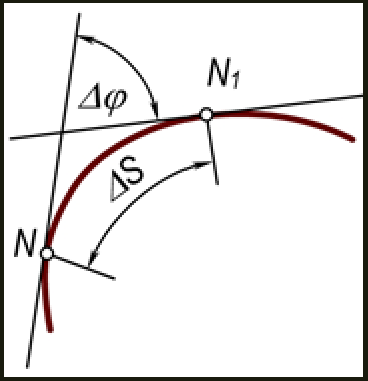


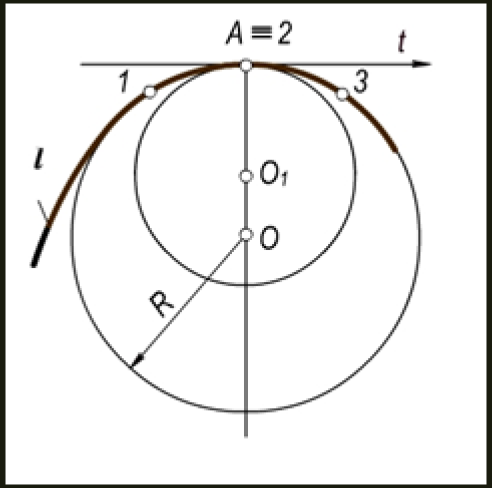
Egri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan unga normal o‘tkazish. ℓ egri chiziqdan tashqaridagi A nuqtani konsentrik aylanalarning markazi sifatida qabul qilib (7.7-rasm), undan berilgan egri chiziqni kesuvchi bir necha aylanalar chiziladi. Bu aylanalar ℓ egri chiziqni ***11***$_1$, ***22***$_1$, ***33***$_1$, …nuqtalarda kesadi. Mos nuqtalarni o‘zaro birlashtirib, egri chiziqning ***11***$_1$, ***22***$_1$, ***33***$_1$,… vatarlarini xosil qilinadi. Vatarlar uchlaridan qarama-qarshi yo‘nalishda unga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi va ularga vatarlar uzunliglarini o‘lchab quyiladi. Bu kesmalarning uchlarini tartib bilan birlashtirib q chiziq xosil qiladi. q va ℓ egri chiziqlar o‘zaro B nuqtada kesishadilar. A va B nuqtalarni birlashtiruvchi n to‘g‘ri chiziq ℓ egri chiziqning normali bo‘ladi.

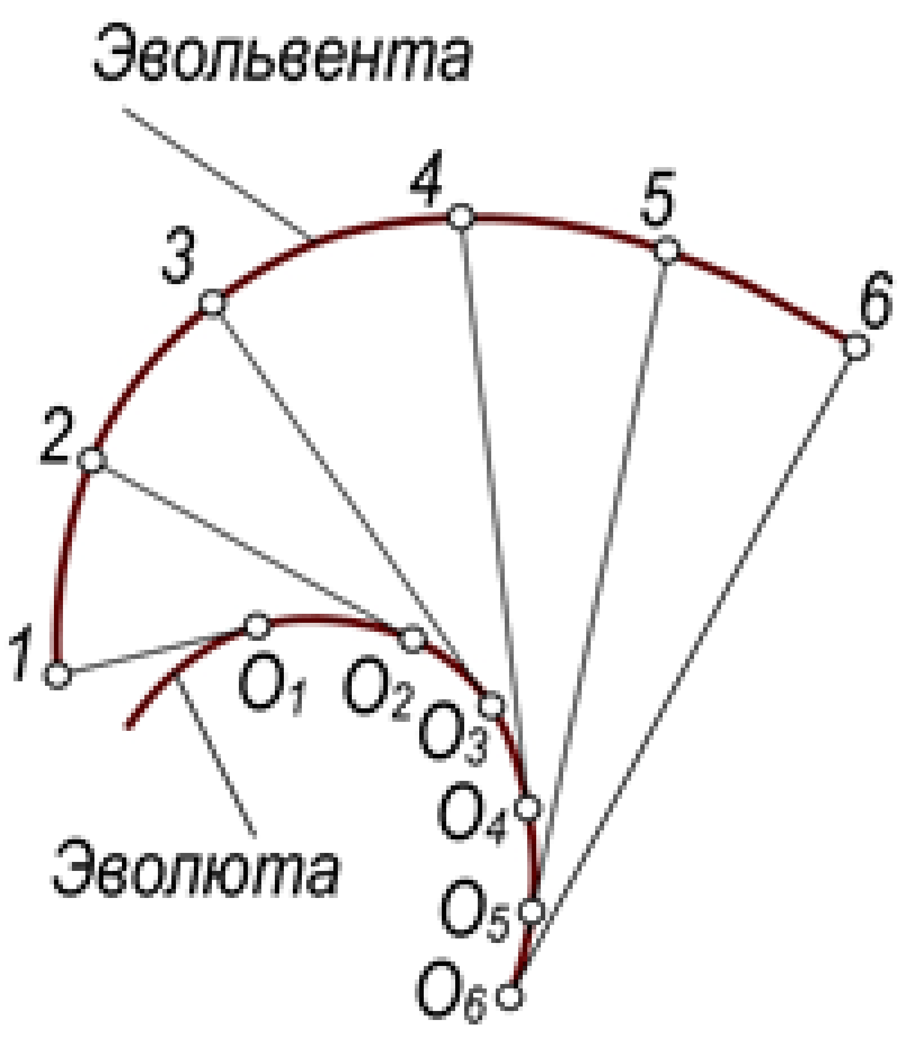


Tekis egri chiziqning egriligi

Qo‘shni yarim urinmalar orasidagi □ burchakni ular orasidagi s yoy uzunligiga nisbatining limiti egri chiziqning egriligi deyiladi. Egrilikni k bilan belgilasak, u quyidagicha ifodalanadi:
Bunda □ burchak qancha katta bo‘lsa, egri chiziq shuncha ko‘p egilgan va, aksincha, qanchalik kichik bo‘lsa, egri chiziq shuncha kam egilgan bo‘ladi. Egrilik qiymati egri chiziqning har bir nuqtasida har xil bo‘ladi. Aylananing hamma nuqtasidagi egrilik bir xildir, to‘g‘ri chiziqda esa egrilik nolga teng. Har qanday egri chiziqning egriligi aylana yordamida aniqlanadi. Bu aylana egri chiziqdagi cheksiz yaqin uchta 1, 2, 3 nuqtalardan o‘tadi. Uning radiusi, egrilik radiusi, markazi esa egrilik markazi deyiladi. Egrilik radiusi R va egrilik miqdori k o‘zaro teskari pro-porsionaldir: k=1/R, ya’ni egrilik radiusi R qancha katta bo‘lsa, k egrilik shuncha kichik va, aksin-cha, egrilik radiusi qancha kichik bo‘lsa k egrilik shuncha katta bo‘ladi. Masalan, to‘g‘ri chiziqda egrilik radiusi cheksiz katta bo‘lganligi tufayli egrilik nolga teng.







Evolyuta va evolventa

Biror ℓ egri chiziqning hamma nuqtalari uchun egrilik markazlari yasalsa, ularning to‘plami ℓ_1 egri chiziqni hosil qiladi. Bu ℓ_1 egri chiziq berilgan ℓ egri chiziqning *evolyutasi* deb ataladi . ℓ egri chiziq ℓ_1 evolyutaga nisbatan evolventa deyiladi).

Evolyutaning urinmalari ℓ evolventaning normallaridir. Evolyuta urinmalarida cheksiz ko‘p evolventalar joylashgan bo‘lishi mumkin. Shuning uchun egri chiziqning evolyutasi o‘z evolventasini aniqlay olmaydi, lekin uning evolventasi o‘z evolyutasini aniqlay oladi.

Tekis egri chiziq nuqtalarining klassifikasiyasi

Tekis egri chiziqlar *monoton* va *ulama* chiziqlarga bo‘linadi. Monoton egri chiziqning qator nuqtalarida egrilik radiusi uzluksiz o‘sib yoki kamayib boradi. Monoton egri chiziq yoylaridan tashkil topgan chiziq *ulama* chiziq deyiladi. Bu yoylarning ulanish nuqtalari ulama chiziqning *uchlari*, ulanuvchi yoylarning o‘zi esa ulama chiziqning tomonlari deb ataladi. YOylarning ulanish xarakteriga qarab, ulama chiziqning uchlari *oddiy* va *maxsus* nuqtalar bo‘lishi mumkin. Egri chiziqning oddiy nuqtasida yarim urinmalar qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘lib, bitta to‘g‘ri chiziq ustida yotadi va egrilik markazlari ustma-ust tushadi. Egri chiziqlarning maxsus nuqtalari quyidagilardan iborat:

Qo‘sh nuqta. Yarim urinmalar qarama-qarshi yo‘nalishga ega, normallar ustma-ust tushadi, egrilik markazlari esa har xil joylashadi.

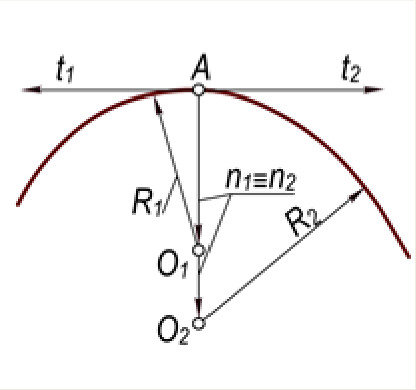
Egilib o‘tish nuqtasi. Yarim urinmalar ham, normallar ham qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘ladi.

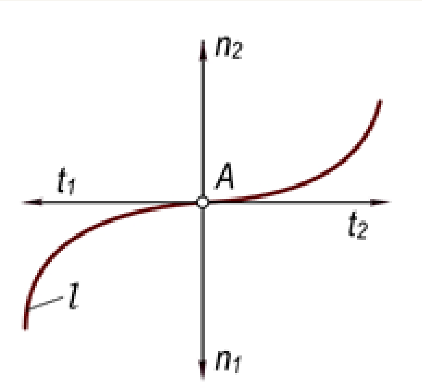
Birinchi turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar ustma-ust tushadi va bir xil yo‘nalishda bo‘ladi, normallar qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘lib, bir chiziq ustida yotadi

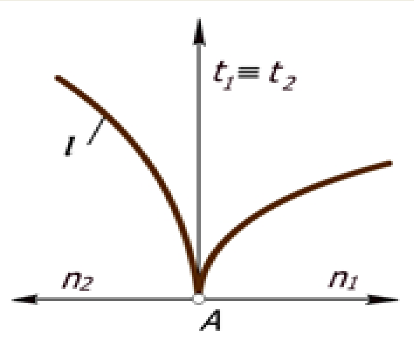
Ikkinchi turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar va normallar juft-juft bo‘lib bir xil yo‘nalishga ega bo‘ladi

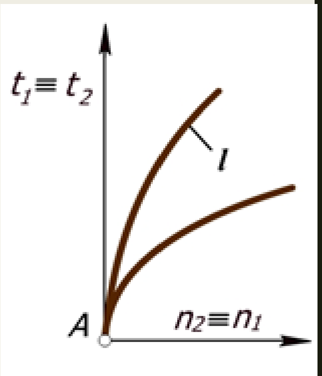
Sinish nuqtasi. Yarim urinmalar va normallar har xil yo‘nalishda bo‘ladi);

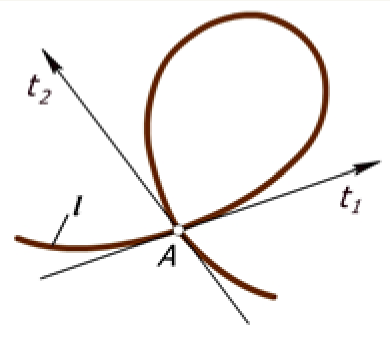
Tugun nuqta. Tugun nuqtada egri chiziq o‘zini-o‘zi bir va bir necha marta kesib o‘tadi





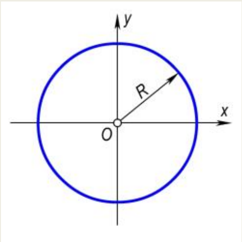
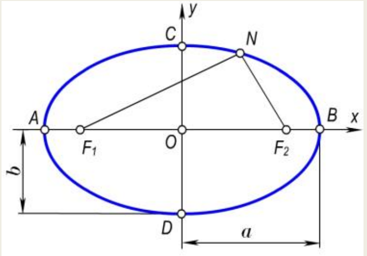
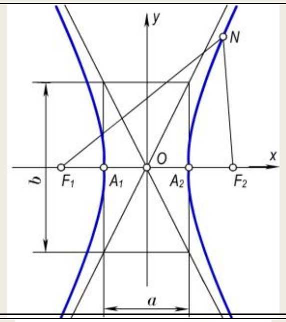
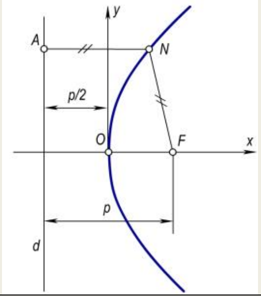






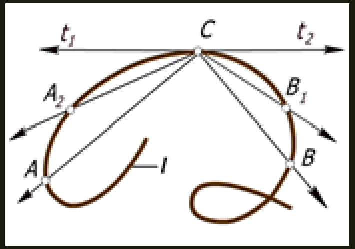
Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Ta’rif. Ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanuvchi egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deyiladi.

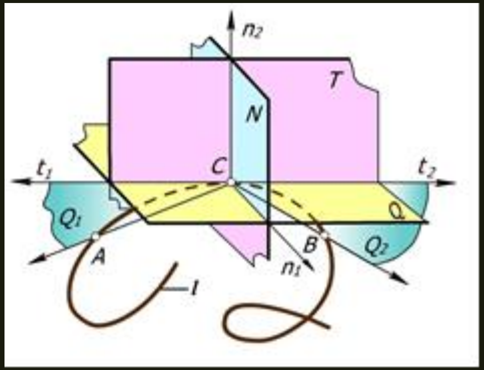
Aylana Berilgan nuqtadan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to‘plami aylana deyiladi. Kanonik tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ Parametrik tenglamasi $x = R \cdot \cos t$ $y = R \cdot \sin t$	
Ellips Berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtadan uzoqliklarining yig‘indisi o‘zgarmas miqdor bo‘lgan nuqtalarning to‘plami ellips deyiladi. $F_1N + F_2N = AB = const$ Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parametrik tenglamasi $x = a \cos t$ $y = b \sin t$	
Giperbola Berilgan F_1 va F_2 ikki nuqtadan uzoqliklarining ayirmasi o‘zgarmas miqdor bo‘lgan nuqtalarining to‘plami giperbola deyiladi. $F_1N - F_2N = A_1A_2 = const$ Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parametrik tenglamasi $x = a \sec t$ $y = b \operatorname{tg} t$	
Parabola Berilgan nuqtadan va d to‘g‘ri chiziqdan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to‘plami parabola deyiladi. FN=AN Kanonik tenglamasi $y^2=2px$ Parametrik tenglamasi $x=t$, $y=\sqrt{2pt}$ yoki $y=t$, $x=t^2/2p$	

Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o‘tkazish

<u>Ta’rif</u>. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq **fazoviy egri chiziq** deyiladi.

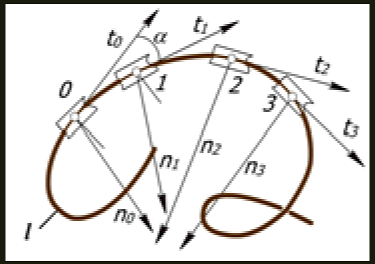


Egri chiziqning ***yopishma*** tekisligi quyidagicha yasaladi. Berilgan ℓ fazoviy egri chiziqda yotgan S nuqta orqali unga t_1, t_2 yarim urinmalar o‘tkazilgan bo‘lsin. Rasmda SA va SB kesuvchi to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazib t_1SA (Q_1) va t_2SB (Q_2) kesuvchi tekisliklarni hosil qilamiz. A va B nuqtalarni S nuqtaga yaqinlashtirganda Q_1 va Q_2 tekisliklar t_1 va t_2 yarim urinmalar atrofida aylanib, ular ustma-ust tushib, Q tekisligini hosil qiladi. Q tekislik ℓ fazoviy egri chiziqqa uning berilgan S nuqtasida o‘tkazilgan ***yopishma*** tekisligi deyiladi.



Fazoviy egri chiziqning berilgan nuqtasida unga cheksiz ko‘p normal o‘tkazish mumkin. Normallar to‘plami hosil kilgan N tekislik egri chiziqning berilgan nuqtasida o‘tkazilgan *normal tekisligi* deyiladi.

Normallar to‘plamidagi chiziqlardan biri n_1 yopishma tekislik ustida yotadi ($n_1 \in Q$), boshqa biri n_2 esa unga perpendikulyar joylashgan ($n_2 \perp Q$) bo‘ladi. Shulardan birinchisi n_1–bosh normal, ikkinchisi n_2 – binormal deyiladi. Binormal n_2 va urinma t hosil kilgan T tekislik to‘g‘rilovchi (rostlovchi) *tekislik* deb ataladi.



O‘zaro perpendikulyar N, Q, T tekisliklar uchyoqlikni tashkil qiladi. Buni 1847 yilda birinchi bo‘lib taklif qilgan fransuz matematigi Jan Frederik Frene nomi bilan *Frene uchyoqligi* deb yuritiladi. Frene uchyoqligidan fazoviy egri chiziqni proeksiyalash uchun tekisliklar sistemasi o‘rnida foydalaniladi. Shuningdek, Q-gorizontal, T-frontal va N-profil proeksiyalar tekisliklari sifatida qabul qilinadi. Biror fazoviy egri chiziq xossalari uning Frene uchyoqlik tekisliklaridagi proeksiyalari bo‘yicha tekshiriladi.

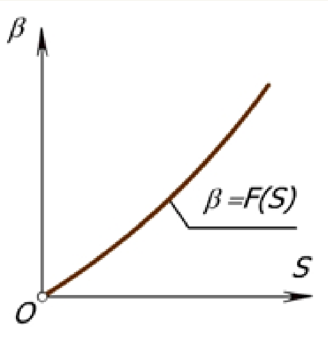
Fazoviy egri chiziqlarning tabiiy koordinatalarda berilishi

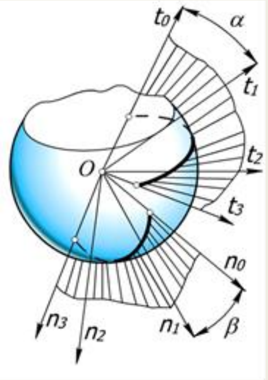
Rasmda berilgan ℓ fazoviy egri chiziqning 0, 1, 2, … nuqtalarida unga o‘tkazilgan t_0, t_1, t_2,… urinmalar va n_0, n_1, n_2,… binormallar tasvirlangan. Fazoviy egri chiziq bo‘ylab harakatlanuvchi nuqta uzluksiz o‘zgaruvchi quyidagi uchta miqdor bilan bevosita bog‘liq bo‘ladi:

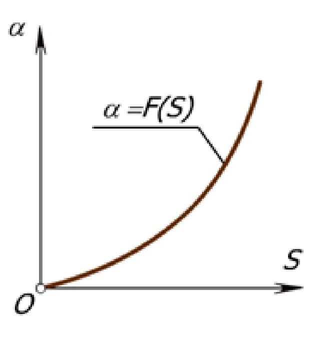
- tanlab olingan 0 nuqtadan boshlab qo‘shni nuqtalar orasidagi s masofa;
- t yarim urinmaning burilish burchagi α;
- qo‘shni binormallar orasidagi β burchak.

Yarim urinmalar orasidagi α burchak ***qo‘shni burchak,*** binormallar orasidagi $\beta°$ burchak ***burilish burchagi*** deyiladi. s, α va β miqdorlar fazoviy egri chiziqning tabiiy koordinatalari deb yuritiladi.

Fazoviy egri chiziqning α qo‘shni burchagi va β burilish burchagini quyidagicha aniqlash mumkin. Ixtiyoriy tanlab olingan biron 0 nuqtadan yarim urinmalarga va binormallarga parallel qilib t_0, t_1, t_2,… va n_0, n_1, n_2,… to‘g‘ri chiziqlar chiqaramiz. Bu to‘g‘ri chiziqlar to‘plami ikki konus sirtini: ***yarim urinmalar yo‘naltiruvchi konusi va binormallar yo‘naltiruvchi konusini*** tashkil qiladi. 0 nuqtani sferaning markazi sifatida qabul qilib biror R radiusi sfera o‘tkazamiz. Bu sfera yarim urinmalar va binormallar yo‘naltiruvchi konuslarini yarim urinmalar va binormallar sferik ***indikatrisalari*** deb ataluvchi egri chiziqlar bo‘yicha kesadi. α va β burchaklar miqdorlari bo‘yicha (masalan, radianda) indikatrisa yoy uzunliklari o‘lchanadi. Fazoviy egri chiziqning s uzunligi va unga mos ravishda α qo‘shni burchak va β burilish burchagi o‘lchanib quyidagicha bog‘liqliklar tuziladi: α=f(s), β=f(s) va ular fazoviy egri chiziqning tabiiy koordinatalaridagi tenglamalari deb ataladi. Rasmlarda shu tenglamalarning grafiklari yasalgan.







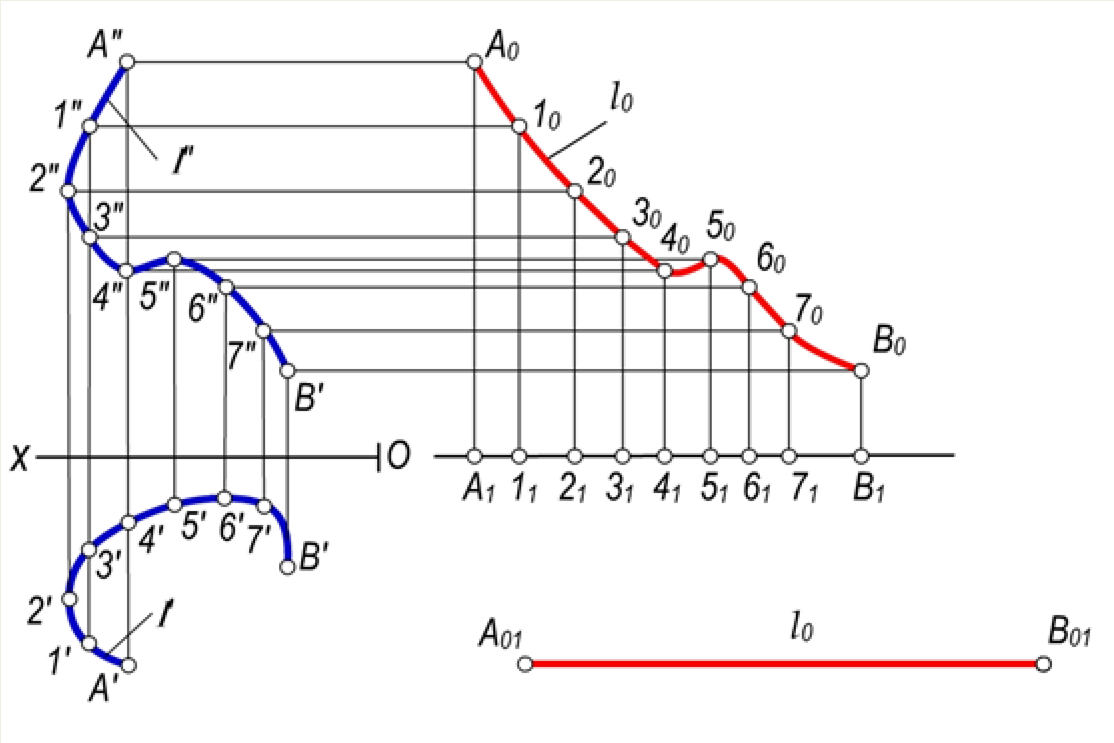
Fazoviy egri chiziqning uzunligini uning to‘g‘ri burchakli proeksiyalariga asosan aniqlash

Egri chiziqning ℓ′ - gorizontal proeksiyasi A′B′ ni har bir bo‘lagini ixtiyoriy tanlangan *a* to‘g‘ri chiziqning A_1 nuqtadan boshlab unga ketma-ket quyib chiqiladi. Xosil bo‘lgan A_1, B_1 kesma A′B′ gorizontal proeksiyani to‘g‘rilangani yoki uni uzunligini o‘lchovchi kesma bo‘ladi.

So‘ngra *a* to‘g‘ri chiziqning A_1, 1_1, 2_1, 3_1,… V_1 nuqtalaridan unga perpendikulyarlar chiqariladi. Bu perpendikulyarlarga ixtiyoriy tanlangan gorizontal Ox chiziqdan ℓ"(A″B″) nuqtalarigacha bo‘lgan masofalar o‘lchanib qo‘yiladi. Natijada ℓ_0 egri chiziq hosil qilinadi.

Chizmaning ixtiyoriy bo‘sh joyida ℓ_{01} to‘g‘ri chiziq olinib, bu to‘g‘ri chiziqqa ℓ_0 egri chiziq nuqtalari ketma-ket o‘lchab qo‘yiladi, ya’ni ℓ_0 to‘g‘rilanadi.

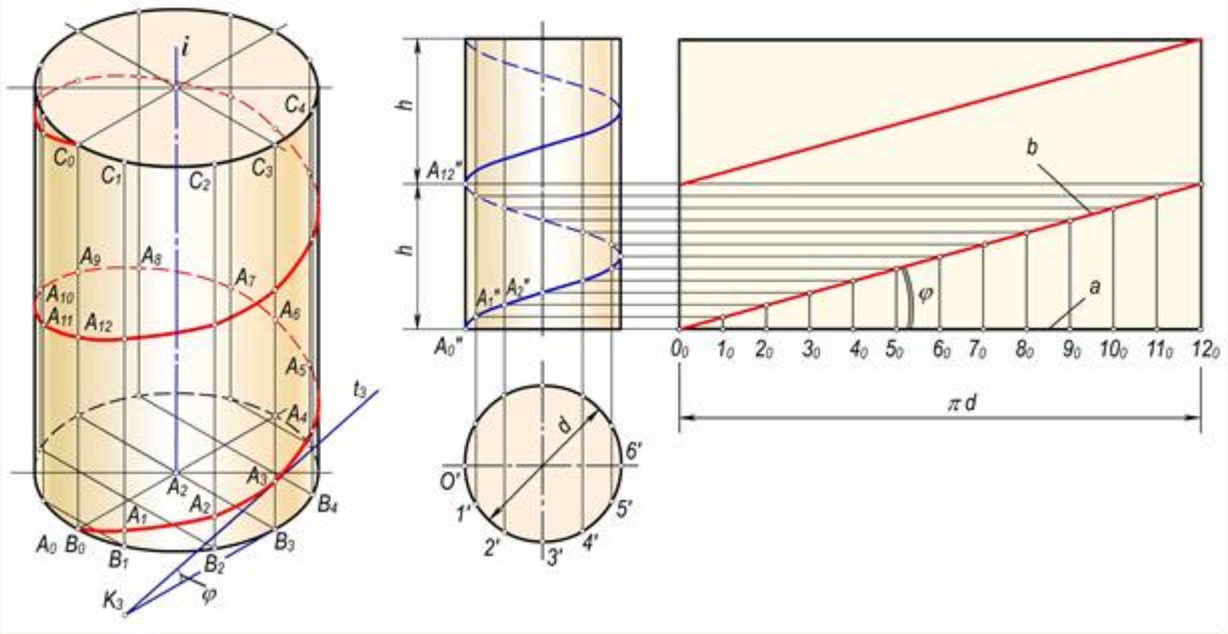
Hosil bo‘lgan $A_{01}B_{01}$ kesma ℓ fazoviy egri chiziqning AB(A′B′, A″B″) bo‘lagining uzunligi bo‘ladi.



Vint chiziqlari

Silindrik vint chiziqlar

<u>Ta’rif</u>. Nuqtaning silindrik sirt bo‘ylab aylanma va ilgarilanma harakati natijasida hosil bo‘lgan traektoriyasi silindrik **vint chizig‘i** deyiladi



Konus vint chizig‘i

<u>Ta’rif</u>. To‘g‘ri doiraviy konus sirtidagi A nuqta ilgarilanma va aylanma harakat qilsa, unda A nuqta konus sirtiga fazoviy vint chiziq chizadi. Bu chiziq **konus vint chizig‘i** deb yuritiladi.